



## Deterministisches Chaos und Himmelsmechanik

(Teil 2)

In diesem zweiten Teil des Artikels werden die Leser die Theorie der Beschreibung dynamischer Systeme im Phasenraum und - anhand von Beispielen - das Auftreten von Chaos in der Himmelsmechanik kennenlernen.

### Der Phasenraum dynamischer Systeme

=====

Der Bewegungsablauf vieler Systeme wird sehr verständlich, wenn man ihn im sogenannten Phasenraum betrachtet: Der physikalische Zustand der betrachteten Körper wird durch ihre Orte und Geschwindigkeiten bestimmt! Nichts liegt also näher, als ein (fiktives) Koordinatensystem - eben den Phasenraum - einzuführen, dessen Koordinaten die Orte und die Geschwindigkeiten der Körper sind. Der Phasenraum ermöglicht so in übersichtlicher Art und Weise, den physikalischen Zustand in seinem zeitlichen Verlauf zu verfolgen. Allgemein hat also der Phasenraum doppelt so viele Koordinaten (= eine doppelt so große Dimension) wie der Konfigurationsraum, das Koordinatensystem der Orte.

Beispiel: das Pendel (Abb. 1).

Zur Beschreibung des Pendels genügt eine Ortskoordinate, nämlich die Winkelauslenkung  $\theta$ .

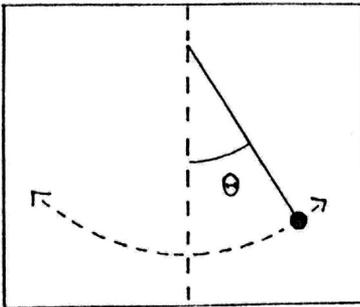


Abb. 1  
Das Pendel

Die zugehörige (Winkel-) Geschwindigkeit ist  $\dot{\theta}$ , der Phasenraum ist also zweidimensional (Abb. 2). Die auf den ersten Blick etwas rätselhafte Form der Phasenraumkurven ist leicht einzusehen:

Bei kleinen Auslenkungen (im Zentrum des Phasenraumportraits um den Gleichgewichtspunkt (1) herum) verläuft die Schwingung des Pendels harmonisch: Die Phasenraumkurven sind Ellipsen:

- bei maximaler Auslenkung ist die Geschwindigkeit Null,
- bei maximaler Geschwindigkeit ist die Auslenkung Null, d.h. das Pendel schwingt durch die Lotebene.

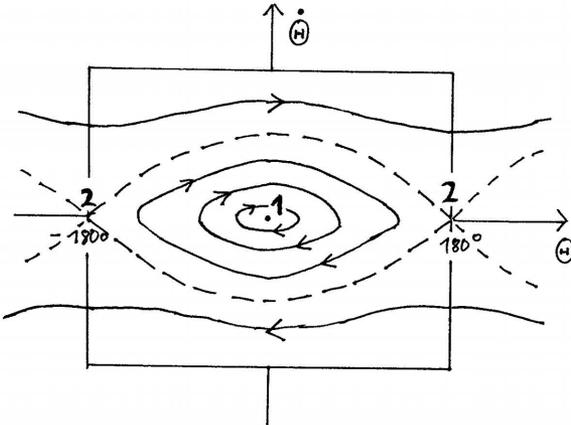


Abb. 2  
Phasenraum des Pendels

Bei größeren Auslenkungen werden die Schwingungen unharmonisch. Grund: Da das Pendel sehr hoch schwingt, verlängert sich die Schwingungsdauer. Überschreitet die Pendelgeschwindigkeit schließlich eine gewisse Grenzgeschwindigkeit, so kommt es zum Überschlag, die Geschwindigkeit wird nie mehr Null.

Die gestrichelt eingezeichnete Grenzkurve, die die Bereiche "Schwingung" und "Überschlag" voneinander trennt, heißt Separatrix. Sie kommt natürlich strenggenommen in der Natur nie vor und entspricht einer unendlich lange dauernden Schwingung eines Pendels, das in der senkrechten Position zur Ruhe kommt.

Zusammenfassend gibt es also folgende "Kurven" im Phasenraum, die später für die Abgrenzung von chaotischen Bewegungen zu regulären Bewegungen von großer Wichtigkeit sind:

- stabile Gleichgewichtspunkte (1): kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen bewirken nur kleine Änderungen in den Phasenraumkurven.
- instabile Gleichgewichtspunkte (2): kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen bewirken große, teilweise qualitative Änderungen.
- Separatrices, die qualitativ unterschiedliche Gebiete voneinander trennen.
- normale Phasenraumkurven, die sich nicht schneiden und im betrachteten Pendelbeispiel zusätzlich periodisch sind.

Was bringt uns das alles nun für das Verständnis von Bewegungsabläufen in der Himmelsmechanik? Darauf werde ich später zurückkommen, doch schon jetzt ist zumindest eines klar: Mit dem Phasenraum hat man ein nützliches Werkzeug, um Bewegungsabläufe zu charakterisieren:

Kennt man die Struktur des Phasenraums, so kann man Aussagen über das Verhalten des betrachteten Systems in Vergangenheit und Zukunft machen.

#### Mehrdimensionale Bewegungen

=====

Im nächsten Schritt wollen wir mehrdimensionale Bewegungen betrachten, wie wir sie in der Himmelsmechanik zu diskutieren haben.

Solche Systeme sind in der Regel "nichtintegrierbar", wie das berühmte Dreikörperproblem, d.h. die Bewegungen lassen sich nicht mehr in geschlossener Form mittels mathematischer Funktionen darstellen. Es bleibt einem nur übrig, die Bewegungsgleichungen numerisch ("mit dem Computer") zu integrieren, wie es beim Rössler-Oszillator in Teil 1 durchgeführt wurde, um die Bewegungsabläufe in Abhängigkeit von der Zeit zu simulieren.

(Bemerkung: Ein klassisches Beispiel für ein integrierbares System ist das "Federpendel": Eine Masse schwingt an einer Feder auf und ab, die Bewegung ist mit einer Sinusfunktion darstellbar).

Ein weiteres, viel gravierenderes Problem ist jedoch die Dimension des Phasenraums. Benötigt man z.B. zwei Koordinaten zur Beschreibung einer Bewegung wie beim gekoppelten Pendel (Abb. 3), so ist der Phasenraum ja vierdimensional, also erst einmal überhaupt nicht darzustellen, geschweige denn zu analysieren!

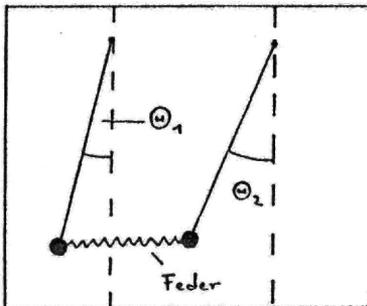


Abb. 3  
Gekoppeltes Pendel

Hier hilft einem glücklicherweise die theoretische Physik weiter, denn man kann mit Hilfe der Erhaltungssätze der Mechanik wie z.B. dem Energieerhaltungssatz oder dem Drehimpulserhaltungssatz die Dimension des Phasenraums durch Elimination je einer der Phasenraumkoordinaten herabsetzen. In unserem Beispiel, dem gekoppelten Pendel, erhält man effektiv wegen der Energieerhaltung einen dreidimensionalen Phasenraum. Um nun die Darstellung weiter zu vereinfachen, führt man sogenannte "Poincaré-Schnitte" durch, d.h. man schneidet den Phasenraum in viele zweidimensionale Scheiben und kann so seine Struktur - z.B. am Bildschirm einer Computersimulation - bequem analysieren.

#### Poincaré-Schnitte und Chaos

Im Poincaré-Schnitt treten statt der Phasenraumkurven (wie z.B. in der Abb. 2) Folgen von Durchstoßpunkten auf, die dem Schnitt mit den Phasenraumkurven entsprechen (Abb. 4,5 u.7). Treten im Poinca-

$r\acute{o}$ -Schnitt immer die gleichen Durchstoßpunkte auf, so handelt es sich bei den geschnittenen Kurven um reguläre, periodische Bahnen (Abb. 4). Oft umgeben solche "permanente Durchstoßpunkte" Gebiete, in denen die Durchstoßpunkte nach und nach sogenannte invariante Kurven auffüllen, die um das Zentrum, den Durchstoßpunkt der periodischen Bahn, laufen, wie Abb. 5 zeigt (Solche Kurven müssen im Allgemeinen nicht unbedingt kreisförmig wie in der Abbildung sein). Die Durchstoßpunkte auf den invarianten Kurven werden jeweils durch eine einzige sogenannte quasiperiodische Phasenraumkurve erzeugt, die sich schraubenlinienhaft auf je einer Oberfläche von ineinander geschachtelten "Tori" (= Schlauchringen) im Phasenraum bewegt (Abb. 6).

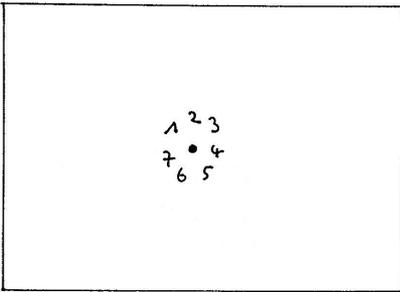


Abb. 4

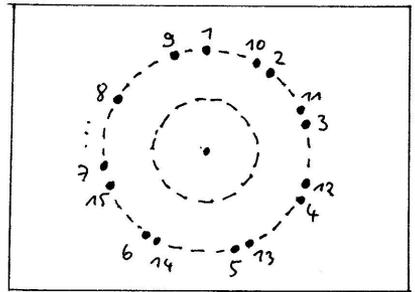


Abb. 5

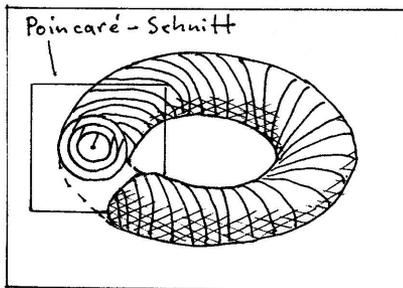


Abb. 6

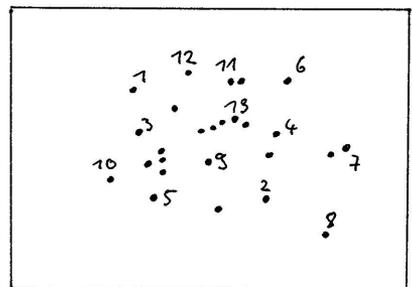


Abb. 7

Wir halten fest: Quasiperiodische Phasenraumkurven sind nicht periodisch, da ihre invarianten Kurven im Poincaré-Schnitt von den Durchstoßpunkten langsam aufgefüllt werden. Sie sind aber immer noch regulär, da sie im  $n$ -dimensionalen Phasenraum sich nur auf der  $n-1$ -dimensionalen Oberfläche eines  $n$ -dimensionalen Torus befinden und nicht ein  $n$ -dimensionales Volumen auffüllen, wie die chaotischen Phasenraumkurven:

Bei chaotischen Bahnen im Phasenraum treten nämlich im Poincaré-Schnitt (Abb. 7) völlig unregelmäßig Durchstoßpunkte auf, ein mehr oder weniger großes Gebiet des Schnittes wird punktwolkenartig aufgefüllt.

Erinnerung: Nach Teil 1 ist das Auftreten von Chaos dadurch charakterisiert, daß sich zwei eng benachbarte Punkte im Phasenraum mit der Zeit exponentiell voneinander entfernen. Dieses exponentielle Anwachsen ist durch den Liapunov-Exponenten bestimmt.

Bevor wir uns endgültig der praktischen Anwendung zuwenden, will ich noch auf den Begriff der "Stochastizität" chaotischen Verhaltens eingehen, der für die Untersuchung der Stabilität dynamischer Systeme wichtig ist. Es gibt zwei Arten chaotischen Verhaltens:

- die schwache Stochastizität:  
Wenn eine chaotische Punktwolke im Poincaré-Schnitt zwischen zwei invarianten Kurven eingesperrt ist, d.h. die chaotische Phasenraumkurve befindet sich zwischen zwei Tori, dann spricht man von schwacher Stochastizität. Dies bedeutet, daß eine an sich chaotische Bahn auf Dauer doch einigermaßen stabil bleibt, weil sie im Phasenraum nicht ausbrechen kann!
- die starke Stochastizität:  
Hier gibt es für die chaotische Kurve im Phasenraum keine Grenzen mehr, die Punktwolke füllt nach und nach den ganzen Poincaré-Schnitt aus. Wenn z.B. ein Planet einmal auf eine solche Torkelbahn geraten sollte, so wird er unweigerlich aus dem Sonnensystem herausgeschleudert!

Diese Trennung zwischen starker und schwacher Stochastizität gilt streng nur für zweidimensionale Systeme, bei komplexeren Systemen, wie es unser Sonnensystem z.B. darstellt, kann - allerdings nur über sehr große Zeiträume hinweg - das Phänomen der Arnold-Diffusion auftreten: bisher schwach stochastische Bahnen können plötzlich stark stochastisches Verhalten zeigen...

#### Enceladus und Dione

=====

Als erste Anwendung unserer Theorie wollen wir die Bewegung zweier Monde des Saturn, Enceladus und Dione, betrachten. Die beiden Sattelliten stehen in Resonanz im Verhältnis 2:1, d.h. während Enceladus zwei Umläufe vollführt, bewegt sich Dione nur einmal um den Zentralkörper Saturn.

Solche Resonanzerscheinungen treten bei der Bewegung von Himmelskörpern gar nicht so selten auf, zum Beispiel bewegt sich Jupiter genau fünf mal um die Sonne, während Saturn nur zweimal das Zentralgestirn umkreist. Diese als "Große Ungleichheit" bekannte Resonanz führt zu starken Störungen der Bahnen der beiden Planeten, deshalb ist damit zu rechnen, daß auch bei Enceladus und Dione solche Bahnstörungen auftreten und eventuell chaotisches Verhalten bewirken.

Unser Problem stellt annähernd ein sogenanntes elliptisches eingeschränktes Dreikörperproblem dar. Der Phasenraum ist vierdimensional, kann aber wie oben erklärt durch ein Bewegungsintegral auf drei Dimensionen erniedrigt werden (siehe [1]).

Wenn man einen geeigneten Poincaré-Schnitt durchführt, kann am Bildschirm eines Computers die Struktur des Phasenraums in Abhängigkeit von einigen Bahnparametern des Systems betrachtet werden. Ein entsprechendes Integrationsprogramm für Enceladus und Dione haben R. Dvorak und M. Karch von der Universität Wien geschrieben. Im Folgenden soll ihr Ergebnis kurz dargestellt werden, Genaueres findet man in [1].

In Abb. 8 ist der Poincaré-Schnitt dargestellt. Man erkennt verschieden indizierte invariante Kurven und ein chaotisches Gebiet:

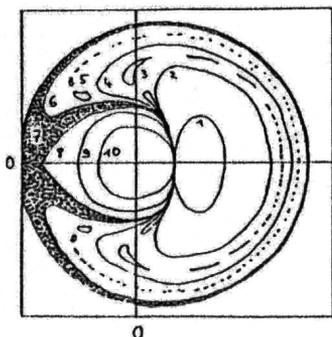


Abb. 8  
Poincaré-Schnitt der Bahn von Enceladus gestört von Dione im Phasenraum.

Kurve 1 entspricht einer quasiperiodischen, nichtchaotischen Bewegung. Erhöht man aber die Exzentrizität des störenden Satelliten Dione im Modell schrittweise (Kurven 2 bis 10), so ändern die invarianten Kurven ihre Form und werden nierenförmig (2 bis 6), reißen zwischendurch mal in eine Kette von Inseln auf (3 und 5) und bilden nach einer chaotischen Übergangsphase (7) erneut geschlossene, elliptische invariante Kurven in der linken Bildhälfte (8 bis 10).

Von besonderem Interesse ist nun die chaotische Übergangsphase (7) zwischen nierenförmigen und elliptischen Kurven.

In diesem Fall erkennt man, daß sich die Bewegung des Enceladus im Phasenraum bald in der Nähe elliptischer, bald in der Nähe nierenförmiger Kurven abspielt. Dazu ist zu bemerken, daß die Koordinaten des Poincaré-Schnitts nach all den Umformungen, die man zur zweidimensionalen Darstellung unternommen hat, nicht mehr etwa die Orts- oder Geschwindigkeitskoordinaten des Enceladus sondern "irgendwelche" anderen physikalischen Größen sind, die so geschickt gewählt wurden, daß der Abstand vom Koordinatennullpunkt genau der Bahnexzentrizität des Enceladus entspricht. So gesehen treten also in der wirklichen Bahnbewegung des Enceladus bei chaotischem Verhalten manchmal große Schwankungen in der Exzentrizität der Bahn auf.

Dieses nicht voraussagbare, plötzliche Umschalten von einem Bewegungstyp zum anderen ist ein typisches Merkmal für die oben erwähnte schwache Stochastizität, und wirklich ist die chaotische Bewegung im betrachteten Modell zwischen invarianten Kurven eingesperrt!

Das System ist also auch bei chaotischem Verhalten stabil, plötzlich auftretende Sprünge in der Exzentrizität des Enceladus machen das ganze Verhalten jedoch im allgemeinen unvorhersagbar.

#### Simulationen des Sonnensystems

=====

Die größten Erfolge im Bereich der Simulation von himmelsmechanischen Systemen erzielten zweifelsohne Jack Wisdom vom Massachusetts Institute of Technology und seine Mitarbeiter. Wisdom konnte z.B. zeigen, daß die sogenannten Kirkwood Lücken im Asteroidengürtel durch chaotische Exzentrizitätsschwankungen von Asteroiden bei 3:1-Resonanz mit Jupiter bewirkt wurden, die zum Auswurf der Himmelskörper aus dem Gürtel führten. Ferner gelang ihm eine Erklärung für die chaotische Rotation des Saturnmondes Hyperion durch seine asphärische Form und elliptische Bahn in einem Näherungsmodell mit der Phasenraum-Methode (siehe [2] u.[3]). Doch die wirklich große Frage war durch diese Details noch nicht beantwortet: Ist das Sonnensystem als Ganzes gesehen stabil? Dazu ist also eine Simulation des Sonnensystems notwendig.

Fassen wir noch einmal zusammen, was wir bis jetzt über die Bahnen der Planeten im Lichte der Chaostheorie aussagen können:

Aus der bisher beobachteten Regelmäßigkeit der Planetenbewegung folgt, daß die Planetenbahnen entweder regulär, also periodisch oder quasiperiodisch sind, oder, falls chaotisches Verhalten entdeckt werden sollte, daß die Planetenbewegung nur schwach stochastisch sein kann. Nun ist aber bekannt, daß bei komplexen dynamischen Systemen die Arnold-Diffusion, also der Übergang zur starken Stochastizität (= Auswurf eines Planeten aus dem Sonnensystem) möglich ist. Die immerwährende Stabilität des Sonnensystems darf also nicht für selbstverständlich gehalten werden, sondern muß, wie bei den meisten anderen dynamischen Systemen auch, durch numerische Experimente untersucht werden!

Im Jahre 1988 begannen deshalb Gerald J. Sussman und Jack Wisdom die bis heute längste Simulation des äußeren Planetensystems (Jupiter bis Pluto). Mit einem eigens dafür entwickelten Computer rechneten sie 845 Millionen Jahre in die Zukunft bei einem maximalen Fehler in den Endpositionen der Planeten von nur 5 Grad.

Solche Simulationen sind äußerst trickreich, so wurde zum Beispiel mit einer Schrittweite von 32,6 Tagen gerechnet, was dazu führte, daß sich die Rundungsfehler im Laufe der Rechnung gegenseitig fast "weghoben", während sie sich bei anderen Schrittweiten drastisch summiert hätten und die lange Rechnerei schließlich keine brauchbaren Ergebnisse mehr geliefert hätte.

Ergebnis nach fünfmonatigem Computereinsatz: keiner der äußeren Planeten gleitet in den nächsten 845 Millionen Jahren in die starke Stochastizität ab, das Sonnensystem bleibt uns bis dahin also in seiner jetzigen Form erhalten.

Zumindest für den exzentrischen Planeten Pluto konnte aber bestätigt werden, daß dieser sich auf einer chaotischen Bahn befindet.

die nicht berechenbar ist. Dazu hatten die beiden Wissenschaftler nämlich in der zweiten Hälfte ihrer Simulation zwei Test-Plutos an nahezu demselben Ort auf die Reise geschickt und dann den Liapunov-Exponenten bestimmt (siehe Teil 1): Laufend bestimmten sie ihre Phasenraum-Distanz  $d$ , die sechs(!)dimensionale euklidische Norm der Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten. Wegen den vernachlässigbaren Geschwindigkeiten entspricht diese Größe praktisch dem Abstand der beiden Test-Plutos in Astronomischen Einheiten (AE). Abb. 9 zeigt das Ergebnis: Sie entfernen sich exponentiell voneinander, in der logarithmischen Darstellung also linear (Wir erinnern uns: Das exponentielle Anwachsen der Entfernungen ist ein Indikator für chaotisches Verhalten!).

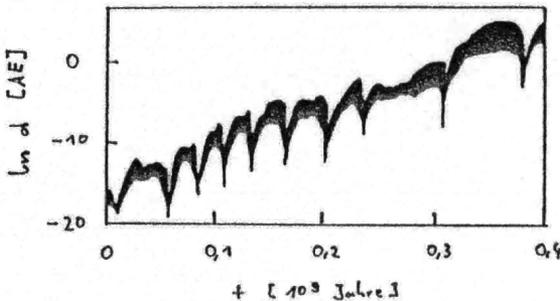


Abb. 9

In der doppeltlogarithmischen Darstellung der Abb. 10 erkennt man, daß das chaotische Verhalten erst beginnt, wenn der exponentielle Effekt des chaotischen Auseinanderstrebens (durchgezogene, teilweise von den Rechenergebnissen überschriebene Linie) das rechenfehlerbedingte Anwachsen der Entfernungen (gestrichelte Linie) überwiegt (die rechenfehlerbedingte Entfernung der beiden Test-Plutos gehorcht statistisch einem Potenzgesetz und erscheint daher in dieser Darstellung als linear):

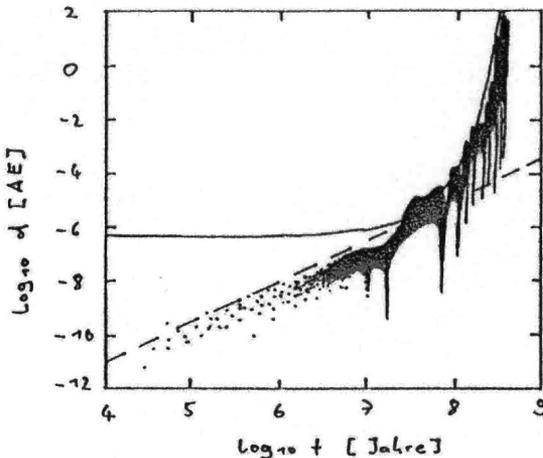


Abb. 10

Aus der Formel in Teil 1 läßt sich nun ständig der Liapunov-Exponent  $\lambda$  berechnen (Abb.11): Erst nach 200 Millionen Jahren hat der Liapunov-Exponent  $\lambda$  seinen endgültigen, aber positiven Wert erreicht:  $\lambda = 10$  hoch  $-7,3$  / Jahr. Dies bedeutet, daß sich der Abstand der beiden Test-Plutos in etwa 20 Millionen Jahren um einen Faktor  $e = 2,71828\dots$  vergrößert. Pluto hat also eine chaotische Bahn, gegen Ende der Simulation haben sich die beiden Test-Plutos schon 100 AE getrennt!

Die chaotische Zone im Phasenraum, in der sich Pluto befindet, scheint ziemlich klein zu sein. "Da die globale Struktur der chaotischen Zone aber nicht bekannt ist, ist es uns nicht möglich vorauszusagen, ob irregulärere Bewegungen möglich sind. Wenn die kleine chaotische Zone, in der Pluto sitzt, mit einer größeren chaotischen Region verbunden ist, könnte es plötzlich zu weit unregelmäßigeren Bahnen kommen." (Sussman & Wisdom, aus [4])

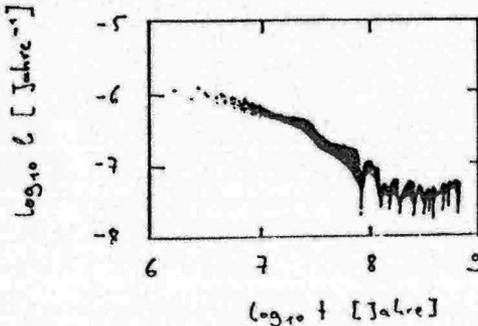


Abb. 11

Ein halbes Jahr nach der Veröffentlichung dieser Ergebnisse vermeldete Jacques Laskar [5], der in einer einfacheren Näherung die Bahnen der inneren Planeten Merkur bis Mars verfolgte, daß alle Bahnen im inneren Sonnensystem ebenfalls chaotisch sind, sogar mit noch größeren Liapunov-Exponenten: Bei Laskar ver-e-facht sich zum Beispiel der Abstand zweier Test-Erden schon nach 5 Millionen Jahren.

#### Zusammenfassung und Schlußbemerkungen

Aus den in diesem Artikel besprochenen Beispielen ergeben sich weitreichende Folgerungen für die Bewegung dynamischer Systeme:

- Nur sehr einfache dynamische Systeme wie z.B. das Federpendel sind integrierbar und haben ausschließlich reguläre Bewegungsabläufe.
- Schon bei einfachen zweidimensionalen Systemen kann durch eine geringfügige Änderung der Systemparameter chaotische Bewegung entstehen (Beispiel: Näherungsmodell für Enceladus und Dione).
- Höher als zweidimensionale Systeme haben im allgemeinen auch in quasiperiodisch scheinenden Regionen keinen stabilen Be-

wegungsablauf über sehr lange Zeiträume hinweg, da das Phänomen der Arnold-Diffusion auftreten kann. Außerdem darf nicht vergessen werden, daß wir hier nur idealisierte Systeme unter Energieerhaltung betrachtet haben. Schon das Auftreten von kleinsten mit Energieverlusten verbundenen Kräften (z.B. Sonnenwind, Gezeitenkräfte bei Objekten im Sonnensystem) kann bisher stabile Kurven im Phasenraum in den chaotischen Bereich verschieben!

- d) Da die unter a) erwähnten Systeme in der Natur streng genommen nicht realisiert sind und auch die zweidimensionale Beschreibung in den meisten Fällen nicht ausreicht, müssen wir in jedem realen System mit dem Auftreten von Chaos rechnen: Schon das Gravitationspotential eines Elektrons in der Entfernung des Andromedanebels kann ein idealisiertes, reguläres System so stören, daß irgendwann eine chaotische Bewegung auftritt, wenn man nur lange genug warten könnte!!

Was soll man nun davon halten, daß alle Bewegungen im Prinzip chaotisch sind - ein Gedanke, der einen schaudern läßt, ist man doch gerade von der Himmelsmechanik gewohnt, z.B. den genauen Zeitpunkt der Bedeckung der Sonne bei einer totalen Sonnenfinsternis bis auf die Sekunde genau vorhergesagt zu bekommen!

Tatsächlich ist es aber die Zeitskala, die uns prinzipiell chaotische Prozesse als regulär, also als nichtchaotisch erscheinen läßt: Während bei atomaren und molekularen Prozessen die Zeit bis zum Wirksamwerden von chaotischem Verhalten in der Größenordnung von Sekunden liegt, hat sie bei komplizierteren Systemen, wie sie etwa in der Meteorologie beschrieben werden, etwa die Größenordnung von einem Tag.

Bei Satellitensystemen kann chaotisches Verhalten in etwa hunderttausend Jahren, beim Sonnensystem nach einigen Milliarden Jahren auftreten. Für die nächste Milliarde von Jahren können wir also - dies belegt auch die Simulation von Sussman & Wisdom - in Bezug auf unser Sonnensystem beruhigt sein.

W. Wriggers

#### Literatur

- [1] R. Dvorak, M. Karch: Chaos und Himmelsmechanik. Sterne und Weltraum 27, S. 350ff+ S.525ff (6+9/1988).
- [2] F. Scheck: Mechanik / Von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos. Springer Verlag, 2.Aufl. (1990).
- [3] J. Wisdom: Chaotic dynamics in the solar system. Icarus 72, 249 (1987).
- [4] D. Fischer: Die Bahnen der Planeten: ein chaotisches System? Sterne und Weltraum 29, S. 28ff (1/1990).
- [5] J. Laskar: A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system. Nature 338, 273 + Kommentar S. 207 (1989).

